УДК 517.518.8

А. А. Буздин, Е. А. Васильева

КОМПАКТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ АППРОКСИМАНТОВ ПАДЕ

Приводятся компактные представления для решения обобщенной задачи Паде, известные ранее только для задачи Паде (компактное представление Натолла). На их основе получены детерминантные представления аппроксимантов [M – 1 / M], [M / M] и [M / M – 1].

Compact presentations for solution of the generalized Padè problem are presented, that have been known only for the Padè problem (so called compact Nutall presentation). Using them determinant presentations for the approximants [M – 1 / M], [M / M] и [M / M – 1] were obtained.

Ключевые слова: обобщенная задача Паде, детерминантное представление, аппроксимант.

Key words: generalized Padè problem, determinant presentation, approximant.

Введение

Интерес к классическим методам рациональной аппроксимации аналитических функций, и в первую очередь к аппроксимациям Паде и их обобщениям, связан с тем, что такие аппроксимации нашли разнообразные применения в вычислительных задачах теоретической физики и механики (обширная библиография по данному вопросу приведена, например, в [1]).

Пусть имеется набор n отдельных точек z_i на комплексной плоскости, и в окрестности каждой из таких точек задано разложение функции в ряд Тейлора:

$$A(z) = \left\{ \sum_{j=0}^{m_i-1} f_{ij}(z-z_i)^j + O[(z-z_i)^{m_i}] \right\}. \qquad (1)$$

Тогда построение аппроксимаций Паде данной функции сводится к отысканию рациональных функций $[L\tilde{\ }M] = P_L(\tilde{z})Q_M(z)$, тейлоровские разложения которых в окрестностях точек z_i совпадают с разложениями (1). При этом степени числителя и знаменателя этой дроби должны удовлетворять условию $L + M = N = \sum_{i=1}^{n} m_i - 1$. Данная задача аппроксимации называется *обобщенной задачей Паде*.

Важными частными случаями этой задачи являются задача Коши — Якоби, когда в ряде точек заданы значения аппроксимируемой функции, и задача Паде, когда в единственной точке задано значение функции и ее производных.

Существуют различные представления рациональных аппроксимантов (см., напр., [1—3]). Одно из них — *детерминантное представление*, дающее решение аппроксимационной задачи в виде отношения двух определителей, впервые полученное Якоби [4] в 1846 г.

Известно (см., напр., [1]), что решение задачи Паде, если оно существует, имеет вид

$$[L/M] = \frac{\det\left\| f_{L-k+1} \quad f_{L-k+2} \quad \cdots \quad f_{L-k+M} \quad \left(z^k \sum_{i=0}^{L-k} f_i z^i \right) \right\|_{k=0}^{M}}{\det\left\| f_{L-k+1} \quad f_{L-k+2} \quad \cdots \quad f_{L-k+M} \quad z^k \right\|_{k=0}^{M}}, \tag{2}$$

где f_j считается равным нулю, если $j < 0$.

Представление (2) можно записать в компактном виде, которое для аппроксимантов Паде вида $[M-1/M]$ было впервые получено Наттоллом в [5], а в 1970 г. Бейкер в [3] обобщил его на аппроксиманты Паде с любым соотношением степеней числителя и знаменателя:

$$[L/M] = \sum_{i=0}^{L-M} f_i z^i + z^{L-M+1} (\mathbf{f}^T [L/M] \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}[L/M]), \tag{3}$$

где $f[L-M] = (f_{L-M+1}, f_{L-M+2}, \ldots, f_L)$ — вектор-столбец, а B — $(M \times M)$ матрица, имеющая следующий вид:

$$\mathbf{B} = \left\| f_{L-k+1} - f_{L-k+2} z \quad f_{L-k+2} - f_{L-k+3} z \quad \cdots \quad f_{L-k+M} - f_{L-k+M+1} z \right\|_{k=1}^{M}.$$

Это равенство называют *компактной формой Наттолла* для аппроксимаций Паде. При $L < M$ полиномиальный член в (3) обращается в нуль в соответствии с соглашением о том, что $f_j = 0$ при $j < 0$.

Получим аналог этого представления для обобщенной задачи Паде. Представление Наттолла можно рассматривать как его частный случай, когда все точки аппроксимации сливаются в одну. На основе нового представления получены изящные представления аппроксимантов, степени числителя и знаменателя которых отличаются более чем на единицу. Аппроксиманты такого вида используются, например, для построения верхних и нижних главных представлений решения степенной проблемы моментов или экстремальных задач (см. [6]).

1. Компактное представление для обобщенной задачи Паде

Введем обозначения для разделенных разностей $f[z_0, \ldots, z_i]$:

$$f_{\overline{i,j}} = f[z_i, z_{i+1,\ldots,} z_j], \quad f_{\overline{i,j},k} = f[z_i, z_{i+1,\ldots,} z_j, z_k], \tag{4}$$

определяемых, как обычно, последовательно согласно формулам:

$$i = 0, \ldots, n \quad : \quad f[z_i] \quad := \quad f_i$$

$$k = 1, \ldots, n-i \quad : \quad f[z_i, \ldots, z_{i+k}] \quad := \quad \frac{f[z_{i+1,\ldots,} z_{i+k}] - f[z_{i,\ldots,} z_{i+k-1}]}{z_{i+k} - z_i}.$$

Приведем решение задачи Коши — Якоби в удобном для нас виде, отличающемся лишь по форме от приведенного в [1]:

$$[L/M]=\frac{\det\left\|f_{\overline{k,L+1}}\quad f_{\overline{k,L+2}}\quad\cdots\quad f_{\overline{k,L+M}}\quad\left(N_{\overline{k,L}}\prod_{i=0}^{k-1}(z-z_i)\right)\right\|_{k=0}^{M}}{\det\left\|f_{\overline{k,L+1}}\quad f_{\overline{k,L+2}}\quad\cdots\quad f_{\overline{k,L+M}}\quad\prod_{i=0}^{k-1}(z-z_i)\right\|_{k=0}^{M}}.\tag{5}$$

Здесь $N_{\overline{k,L}}$ — интерполяционные полиномы Ньютона, принимающие в точках z_j ($j=k,\ldots,L$) значения f_j:

$$N_{\overline{k,L}}=\sum_{i=0}^{L-k}\left(f_{\overline{k,i+k}}\prod_{j=0}^{i-1}(z-z_{j+k})\right),\tag{6}$$

Условимся считать также, что $N_{\overline{i,j}}=0$ при i □ j.

Получим компактное представление для аппроксимантов задачи Коши — Якоби. Для этого в числителе и знаменателе (5) вычтем вторую строку, умноженную на $(z-z_{M-1})$ из первой, затем вычтем третью строку, умноженную на $(z-z_{M-2})$ из второй и так далее до последней, при этом интерполяционный полином Ньютона (6) удобно записать в следующем виде:

$$N_{\overline{m,L}}=f_L+f_{\overline{L-1,L}}(z-z_L)+f_{\overline{L-2,L}}(z-z_L)(z-z_{L-1})+\cdots=\sum_{i=0}^{L-m}f_{\overline{L-i,L}}\prod_{j=0}^{i-1}(z-z_{L-j}).$$

В результате указанных преобразований в последнем столбце числителя (5) возникнут выражения вида

$$\prod_{j=0}^{k-1}(z-z_j)\left(\sum_{i=0}^{L-k}f_{\overline{L-i,L}}\prod_{j=0}^{i-1}(z-z_{L-j})-\sum_{i=0}^{L-k+1}f_{\overline{L-i,L}}\prod_{j=0}^{i-1}(z-z_{L-j})\right)=$$
$$=-\prod_{j=0}^{k-1}(z-z_j)\left(f_{\overline{k-i,L}}\prod_{j=0}^{L-k}(z-z_{L-j})\right)=-f_{\overline{k-1,L}}l_L(z),$$

где $l_L(z)=\prod_{j=0}^{L}(z-z_j)$, а представление (5) приведется к виду

$$[L/M]=\frac{\det\begin{pmatrix}\mathbf{B}(z) & -\boldsymbol{\omega}_1^T[L/M]l_L(z)\\ \boldsymbol{\omega}_2[L/M] & N_{\overline{0,L}}\end{pmatrix}}{\det\mathbf{B}(z)}.\tag{7}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_1[L/M]=\left(f_{\overline{0,L}},f_{\overline{1,L}},\ldots,f_{\overline{M-1,L}}\right)$, $\boldsymbol{\omega}_2[L/M]=\left(f_{\overline{0,L+1}},f_{\overline{0,L+2}},\ldots,f_{\overline{0,L+M}}\right)$,

а матрица $\mathbf{B}(z)=\left\{T_{\overline{k,L+j}}(z)\right\}_{j,k=1}^{M}$ с элементами

$$T_{\overline{i,j}}(z)=f_{\overline{i,j}}-f_{\overline{i-1,j}}(z-z_{i-1}).\tag{8}$$

Преобразуем числитель, добавив последовательно к его последней строке первую строку, деленную на $l_0(z)$, затем вторую строку, деленную на $l_1(z)$, и так далее все остальные (вплоть до предпоследней, деленной на $l_{M-1}(z)$).

Выпишем выражение, которое возникает в k-м столбце последней строки:

$$f_{\overline{0,L+k}} + b_{1k} / l_0(z) + b_{2k} / l_1(z) + \cdots + b_{Mk} / l_{M-1}(z) =$$

$$= f_{\overline{0,L+k}} + \frac{f_{\overline{1,L+k}} - f_{\overline{0,L+k}}}{z - z_0} + \frac{f_{\overline{2,L+k}}}{(z-z_0)(z-z_1)} - \frac{f_{\overline{1,L+k}}}{z-z_0} + \cdots$$

$$+ \frac{f_{\overline{M,L+k}}}{(z-z_0)\cdots(z-z_{M-1})} - \frac{f_{\overline{M-1,L+k}}}{(z-z_0)\cdots(z-z_{M-2})} = f_{\overline{M,L+k}} / l_{M-1}(z).$$

Тогда выражение (7) примет вид

$$[L/M] = \frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{B}(z) & -\boldsymbol{\omega}^T[L/M] l_L(z) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}[L/M] / l_{M-1}(z) & N_{\overline{M,L}} \end{pmatrix}}{\det \mathbf{B}(z)}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}[L/M] = \left(f_{\overline{M,L+1}}, f_{\overline{M,L+2}}, \ldots, f_{\overline{M,L+M}} \right).$$

Разлагая числитель по последней строке, затем каждый из полученных определителей по последнему столбцу и используя выражение обратной матрицы $\mathbf{B}^{-1}(z)$ через алгебраические дополнения к элементам $\mathbf{B}(z)$, получим:

$$[L/M] = N_{\overline{M,L}} + \prod_{j=M}^{L} (z - z_j)(\tilde{\boldsymbol{\omega}}[L/M]\ \mathbf{B}^{-1}(z)\ \boldsymbol{\omega}^T[L/M]). \tag{10}$$

При $M > L$, в соответствии с нашими соглашениями, полином Ньютона обращается в нуль, а $\prod_{j=M}^{L}(z - z_j) = 1$.

Формула (10) остается справедливой и для задач с совпадающими узлами. В этом случае интерполяционный полином Ньютона следует заменить интерполяционным полиномом Эрмита, а разделенные разности понимаются согласно формуле Эрмита

$$f[z_0, z_1, \ldots, z_k] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\prod_{j=0}^{k} (\xi - z_j)} d\xi, \tag{11}$$

где Γ — это контур, который содержит точки z_0, z_1, …, z_k внутри себя. Например, для совпадающих точек $z_0 = z_1 = \ldots = z_k$ получается $f[z_0, z_0, \ldots, z_0] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$.

Полученное компактное представление аппроксимантов Паде переходит в компактную форму Натолла (3), если все точки z_k сливаются в одну. При этом значения разделенных разностей переходят в значения соответствующих коэффициентов разложения функции в степенной ряд, а интерполяционные полиномы Ньютона и Эрмита — в отрезки ряда Тейлора.

2. Детерминантные представления для некоторых аппроксимантов

Формуле (10) для ряда частных, но важных случаев, когда степень числителя аппроксиманта равна степени знаменателя или отличается от нее на единицу, можно придать более элегантный вид. Представление вида $[M\,/\,M-1]$, полученное авторами способом, не использующим компактное представление, применялось в [7] и [8] для построения предобуславливателя, который использовался для эффективного решения больших систем линейных уравнений.

Заметим, что из формулы Эрмита (11) следует, что для функций $T_{\overline{i,j}}(z)$ из (8) справедливо представление

$$T_{\overline{i,j}}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)(\xi-z)}{\prod_{j=0}^{k}(\xi-z_j)}\,d\xi.$$

Из этого представления видны следующие свойства функций $T_{\overline{i,j}}(z)$, которые, впрочем, можно легко проверить непосредственно.

1. Функции $T_{\overline{i,j}}(z)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} T_i(z) &= -f_i(z-z_i),\\ T_{\overline{i,i+k}}(z) &= \frac{T_{\overline{i,i+k+1}}(z)-T_{\overline{i,i+k-2},i+k}(z)}{z_{i+k-1}-z_{i+k}}. \end{aligned}$$

Здесь и далее через $T_{\overline{i,i+k},j}(z)$ обозначена функция вида $T_{\overline{i,i+k},j}(z)=$ $=f_{\overline{i,i+k},j}-f_{\overline{i-1,i+k},j}(z-z_{i-1})$, где разделенные разности $f_{\overline{i,i+k},j}$ определяются как в (4).

2. $T_{\overline{i,i+k}}(z_{i+p})=f_{\overline{i,i+p-1},\overline{i+p+1,i+k}}$ $(p\leqslant k,\ p=1,2,\ldots,k)$.

3. Функции $T_{\overline{i,j}}(z)$ симметричны относительно своих индексов.

4. Пусть $\mathbf{T}^{(1)}$ и $\mathbf{T}^{(2)}$ — векторы следующего вида:

$$\mathbf{T}^{(1)}=(T_{\overline{1,k}},T_{\overline{1,k+1}},\ldots,T_{\overline{1,k+M-1}}),\ \ \mathbf{T}^{(2)}=(T_{\overline{1,k},j},T_{\overline{1,k+1},j},\ldots,T_{\overline{1,k+M-1},j}).$$

Тогда вектор имеет вид

$$\tilde{\mathbf{T}}^{(2)}=(T_{\overline{1,p-1},\overline{p+1,k},j},T_{\overline{1,p-1},\overline{p+1,k+1},j},\ldots,T_{\overline{1,p-1},\overline{p+1,k+M-1},j}).$$

Справедливость последнего утверждения хорошо видна из следующего представления $(l+1)$-й компоненты вектора $\mathbf{T}^{(2)}$:

$$T_{\overline{1,k+l},j}=\frac{T_{\overline{1,p-1},\overline{p+1,k+l},j}-T_{\overline{1,k+l}}}{z_j-z_p},$$

которое мы получим, воспользовавшись свойством симметричности функций $T_{\overline{i,j}}(z)$.

Воспользуемся указанными свойствами и преобразуем числитель и знаменатель (9) аппроксиманта вида $[M - 1/M]$. В этом случае числитель (9) имеет вид

$$\begin{vmatrix} T_{\overline{M-1,M}} & \cdots & T_{\overline{M-1,2M-3}} & T_{\overline{M-1,2M-2}} & T_{\overline{M-1,2M-1}} & -f_{M-1} \\ T_{\overline{M-2,M}} & \cdots & T_{\overline{M-2,2M-3}} & T_{\overline{M-2,2M-2}} & T_{\overline{M-2,2M-1}} & -f_{\overline{M-2,M-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{\overline{0,M}} & \cdots & T_{\overline{0,2M-3}} & T_{\overline{0,2M-2}} & T_{\overline{0,2M-1}} & -f_{\overline{0,M-1}} \\ f_M & \cdots & f_{\overline{M,2M-3}} & f_{\overline{M,2M-2}} & f_{\overline{M,2M-1}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Используя свойство 4, рассматривая в качестве векторов $\mathbf{T}^{(1)}$ и $\mathbf{T}^{(2)}$ соответственно M-й и $(M - 1)$-й столбцы, умножим M-е столбцы числителя и знаменателя на $z - z_{2M-2}$ и сложим $(M - 1)$-й столбец с M-м. Тем самым мы исключим из M-го столбца индекс $(2M - 2)$. Тогда M-й столбец числителя примет вид

$$(T_{\overline{M-1,2M-3},2M-1}, T_{\overline{M-2,2M-3},2M-1}, \ldots, T_{\overline{0,2M-3},2M-1}, f_{\overline{M,2M-3},2M-1})^T,$$

а M-й столбец знаменателя —

$$(T_{\overline{M-1,2M-3},2M-1}, T_{\overline{M-2,2M-3},2M-1}, \ldots, T_{\overline{0,2M-3},2M-1})^T.$$

Затем, при помощи $(M - 2)$-го столбца исключим индекс z_{2M-3} из M-го и $(M - 1)$-го столбцов, и так далее.

Тогда через $M - 1$ таких шагов получим для числителя (9):

$$\begin{vmatrix} T_{M-1,M} & T_{M-1,M+1} & \cdots & T_{M-1,2M-2} & -f_{M-1} \\ T_{M-2,M-1,M} & T_{M-2,M-1,M+1} & \cdots & T_{M-2,M-1,2M-2} & -f_{M-2,M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{\overline{1,M}} & T_{\overline{1,M-1},M+1} & \cdots & T_{\overline{1,M-1},2M-2} & -f_{\overline{1,M-1}} \\ T_{\overline{0,M}} & T_{\overline{0,M-1},M+1} & \cdots & T_{\overline{0,M-1},2M-2} & -f_{\overline{0,M-1}} \\ f_M & f_{M+1} & \cdots & f_{2M-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Знаменатель (9), как и раньше, будет отличаться от числителя тем, что в нем будут отсутствовать последний столбец и последняя строка.

Проводя аналогичные преобразования со строками, исключим индексы $1, \ldots, M - 1$. Тогда через $M - 1$ таких шагов получим:

$$[M-1/M] = \mathbf{f}[M/M]\tilde{\mathbf{B}}^{-1}(z)\mathbf{f}^T[0/M],$$

где элементы матрицы $\tilde{\mathbf{B}}(z) = \{T_{i,M+j}\}_{i,j=0}^{M-1}$ имеют вид

$$T_{i,j}(z) = f_i - f_{i,j}(z - z_j), \qquad (12)$$

а вектор $\mathbf{f}[i/n] = (f_i, f_{i+1}, \ldots, f_{i+n-1})$.

Особенно элегантно полученная формула выглядит в случае, когда в M точках x_k заданы значения функции $f_0, f_1, \ldots, f_{M-1}$ и ее производной $f'_0, f'_1, \ldots, f'_{M-1}$:

$$[M-1/M] = \mathbf{f}[0/M]\ \tilde{\mathbf{B}}^{-1}(z)\ \mathbf{f}^T[0/M],$$

где элементы матрицы $\tilde{\mathbf{B}}(z) = \{T_{i,j}\}_{i,j=0}^{M-1}$ имеют вид (12) при $i \neq j$ и $T_{i,i} = f_i - f'_i(x - x_i)$.

Получим теперь формулу для аппроксиманта $[M / M - 1]$. Для этого достаточно построить рациональную функцию $[M - 1 / M]$, принимающую в точках $z_0, z_1, \ldots, z_{2M-1}$ значения $1/f_0, 1/f_1, \ldots, 1/f_{2M-1}$. Тогда обратная к ней функция $[M / M - 1]$ в тех же точках будет принимать значения $f_0, f_1, \ldots, f_{2M-1}$. После элементарных алгебраических преобразований искомый аппроксимант примет вид

$$[M / M-1] = \left(\mathbf{1}\ \tilde{\mathbf{B}}^{-1}(z)\ \mathbf{1}^T\right)^{-1},$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}} = \{f_i + f_{i,M+j}(z - z_i)\}_{i,j=0}^{M-1}, \quad \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1).$$

Получим также формулу для интерполянта вида $[M / M]$. Для этого проведем над (5) преобразования, аналогичные тем, которые мы применяли для построения аппроксиманта $[M - 1, M]$. Тогда (5) примет вид

$$[M / M] = \frac{\det\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(z) & \mathbf{F}_1^T[M / M] \\ -\mathbf{F}_2[M / M](z - z_M) & f_M \end{pmatrix}}{\det \tilde{\mathbf{B}}(z)},$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}}(z) = \{T_{i,M,M+j+1}\}_{i,j=0}^{M-1},$$

$$\mathbf{F}_1[M / M] = (f_{0,M}, f_{1,M}, \ldots, f_{M-1,M}),$$

$$\mathbf{F}_2[M / M] = (f_{M,M+1}, f_{M,M+2}, \ldots, f_{M,2M}).$$

Перепишем полученное выражение, дописав к каждому из определителей столбец и строку, не меняющие их значения:

$$[M / M] = \frac{\det\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(z) & \mathbf{F}_1^T[M / M] & 0 \\ \mathbf{F}_1^T[M / M](z - z_M) & f_M & 0 \\ \mathbf{f}[M+1 / M] & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(z) & \mathbf{0} \\ \mathbf{T} & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\mathbf{T} = (T_{M,M+1}, T_{M,M+2}, \ldots, T_{M,2M}).$$

И в числителе, и в знаменателе вычтем последнюю строку из предпоследней. Затем, начиная с предпоследней строки, применяя преобразования для исключения индекса, избавимся от второго индекса M у элементов $T_{i,\, M+j}$ и $f_{k,\, M}$:

$$[M/M] = \frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{B}(z) & \mathbf{f}[0/M] & \mathbf{1} \\ \mathbf{T} & f_M & 1 \\ \mathbf{f}[M+1/M] & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \mathbf{B}(z) & \mathbf{1} \\ \mathbf{T} & 1 \end{pmatrix}} = -\frac{\det\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1(z) & \mathbf{f}[0/M+1] \\ \mathbf{f}[M+1/M] & 0 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{B}_1(z)}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \left\| T_{k,M+1}, T_{k,M+2}, \ldots, T_{k,2M}, 1 \right\|_{k=0}^{M}.$$

Из выражения (13) можно получить другое представление для аппроксиманта [M / M], применив уже использованный прием, как для построения аппроксиманта [M / M – 1] из [M – 1 / M]:

$$[M/M] = -\frac{\det \tilde{\mathbf{B}}(z)}{\det\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(z) & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}},$$

где $\tilde{\mathbf{B}} = \left\| f_k + f_{k,M+1}(z-z_k), \ldots, f_k + f_{k,2M}(z-z_k), f_k \} \right\|_{k=0}^{M}$.

Список литературы

1. *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М., 1986.
2. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to numerical analysis. New York, 1992.
3. *Baker G. A. Jr.* The Padè approximant and some related generalizations / Baker G. A. Jr., and J. L. Gammel (eds.). The Padè Approximant in Theoretical Physics. New York, 1970. P. 1—39
4. *Jacobi C. G. J.* Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werte durch eine gebrochene rationale Funktion // J. für Reine und Angewandte Math. 1846. Vol. 30. P. 127—156.
5. *Nuttall J.* Convergence of Pade approximants for the Bethe-Salpeter amplitude // Phys. Rev. 1967. Vol. 157. P. 1312—1316.
6. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
7. *Буздин А. А., Васильева Е. А.* Об одном варианте метода неполного блочного разложения // Вестник Калининградского государственного университета. 2005. Вып. 1—2. С. 70—76.
8. *Буздин А. А., Васильева Е. А.* Неполное блочное разложение, основанное на аппроксимациях Паде // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, №4. С. 89—99.

Об авторах

Алексей Алексеевич Буздин — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: buzdina@inbox.ru

Екатерина Алексеевна Васильева — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: buzdina@inbox.ru

Authors

Dr Aleksey Buzdin — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: buzdina@inbox.ru

Dr Ekaterina Vasilyeva — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: buzdina@inbox.ru